FDTDを使った音響解析

目 次

1　基本方程式

1.1　流体中の音波

音波の基本方程式は粒子速度と圧力を用いて以下の式となる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P &= -\kappa\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{U}} &(1)\\
\frac{\partial}{\partial t}\dot{\boldsymbol{U}} &= -\frac{1}{\rho}\nabla P &(2)\\
\dot{\boldsymbol{U}} &= \begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} &(3)
\end{aligned}
$$

P は圧力,$\dot{\boldsymbol{U}}$ は粒子速度ベクトル,κ は体積弾性率,ρ は密度とする. (1) は連続の式でありまた (2) は運動方程式である.

1.2　固体中の弾性波

固体中を伝播する弾性波の基本方程式は以下になる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{T} &= [c]\cdot\nabla_s\dot{\boldsymbol{U}} &(4)\\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{\boldsymbol{U}} &= \nabla\cdot\boldsymbol{T} &(5)
\end{aligned}
$$

(4) はフックの法則であり, また (5) は運動方程式である。

$\dot{\boldsymbol{U}}$ は粒子速度ベクトル、$\boldsymbol{T}$ は応力ベクトル、ρ は密度,$\boldsymbol{c}$ はスチフネステンソルである. また $\nabla\cdot$,∇_s は Auld の演算子 [1] と呼ばれ $\nabla_s = \nabla\cdot^t$ の関係を満たす。各行列成分は次に示すようになる.

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{56} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\nabla\cdot = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

応力は一般には 3×3 のテンソル（ T_{kl} ; $k,l = 1\sim 3$ ）量である。実際には $T_{kl} = T_{lk}$ の関係があるので、考慮すべき独立な成分は 6 つになる。応力ベクトルはこの応力テンソルの独立な 6 つの成分 $T_1 \sim T_6$ で表した物である。スチフネステンソルの各成分には $c_{ij} = c_{ji}$ の関係がある。

固体内の弾性波は縦波と横波を含んでいるので速度ベクトルを縦波 $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{l}}$ と横波 $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{t}}$ の二つのベクトル場を用いて表す.

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{l}} + \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{t}} \tag{10}$$

ここで横波と縦波はベクトル速度ポテンシャル $\boldsymbol{A} = [A_1, A_2, A_3]$ とスカラ速度ポテンシャル ϕ を用いて以下で定義する.

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{l}} = \nabla\phi \tag{11}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{t}} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{12}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{13}$$

よって速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ はベクトル速度ポテンシャルとスカラ速度ポテンシャルを用いて以下のように表すことができる.

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \nabla\phi + \nabla \times A \tag{14}$$

この式 (14) に $\nabla\cdot$ を作用させる.

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{U}} = \nabla^2\phi + \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{15}$$

ベクトル解析の恒等式より

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{16}$$

であるから, 式 (15) は

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{U}} = \nabla^2\phi \tag{17}$$

となる.

またこの式 (14) に $\nabla\times$ を作用させ

$$\begin{aligned} \nabla \times \dot{U} &= \nabla \times \nabla\phi + \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \\ &= 0 + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \\ &= -\nabla^2\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{18}$$

となる. ここでベクトル恒等式

$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \tag{19}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{20}$$

を用いた.

よって式 (17) と式 (18) から速度ベクトル $\dot{U}$ が計算されれば, 縦波 (スカラ速度ポテンシャル), 横波 (ベクトル速度ポテンシャル) を解析できることになる.

2　解析方法

時間と空間について中心差分を取りいわゆる FDTD 法を用いて応力ベクトル $\boldsymbol{T}$ と速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ を数値的に解析する。求められた応力と粒子速度から (14) の関係を用いて速度ポテンシャル $\dot{\boldsymbol{A}}$ とスカラ速度ポテンシャル $\dot{\phi}$ を求める。差分の精度については時間は 2 次精度, 空間については 2 次精度と 4 次精度を考慮する。

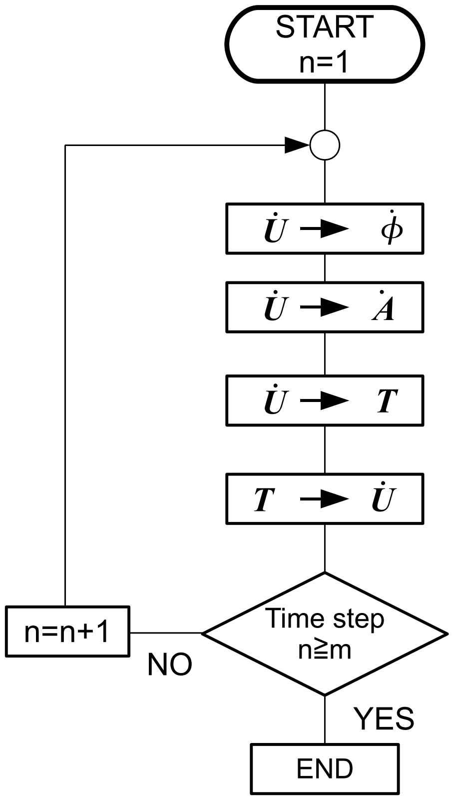


図 1: 計算のフローチャート図. 粒子速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ からスカラ・ベクトル速度ポテンシャル $\dot{\phi}$,$\dot{\boldsymbol{A}}$ が計算される. また粒子速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ から半ステップ時間後の応力 $\boldsymbol{T}$ が計算される。この応力ベクトルから粒子速度が計算され時間ステップを更新する

2.1 速度ベクトル, 応力ベクトル

(4) と (5) を時間と空間について中心差分で離散化し応力ベクトル及び粒子速度ベクトルを求める.

その為にまず (4) を書き下す

$$
\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{56} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{56} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\dot{u} \\ \frac{\partial}{\partial y}\dot{v} \\ \frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\ \frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w} \\ \frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w} \\ \frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
c_{11}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{12}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{13}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{14}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{15}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{16}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{21}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{22}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{23}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{24}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{25}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{26}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{31}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{32}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{33}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{34}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{35}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{36}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{41}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{42}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{43}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{44}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{45}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{46}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{51}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{52}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{53}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{54}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{55}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{56}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{61}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{62}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{63}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{64}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{65}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{66}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v})
\end{bmatrix} \tag{21}
$$

となる。

ただし等方性のある弾性固体の場合にはこのスチフネステンソル $\boldsymbol{c}$ は下記のように表される.

$$
\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \tag{22}
$$

したがって媒質が等方性弾性固体の場合には式 (21) は以下のようになり,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{12}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{12}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\ c_{12}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{11}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{12}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\ c_{12}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{12}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{11}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\ c_{44}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) \\ c_{44}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) \\ c_{44}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \end{bmatrix} \tag{23}$$

と簡略できる.

次に (5) を書き下せば

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}T_1 + \frac{\partial}{\partial z}T_5 + \frac{\partial}{\partial y}T_6 \\ \frac{\partial}{\partial y}T_2 + \frac{\partial}{\partial z}T_4 + \frac{\partial}{\partial x}T_6 \\ \frac{\partial}{\partial z}T_3 + \frac{\partial}{\partial y}T_4 + \frac{\partial}{\partial x}T_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

となる。したがってこの二つの式を時間と空間についてそれぞれ中心差分で書き下し離散式を得る.

2.2 スカラ速度ポテンシャル, ベクトル速度ポテンシャル

速度ベクトルとスカラ速度ポテンシャル, ベクトル速度ポテンシャルの関係を見るために式 (17) と式 (18) を書き下す. まず (17) より

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{25}$$

ここで

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_p^2\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) \tag{26}$$

の関係があるので

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{w}}{\partial z} &= \frac{1}{c_p^2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)\\ &= \frac{1}{c_p^2}\left(\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

つぎに (18) を書き下す.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\dot{w}-\frac{\partial}{\partial z}\dot{v}\\ \frac{\partial}{\partial z}\dot{u}-\frac{\partial}{\partial x}\dot{w}\\ \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}-\frac{\partial}{\partial y}\dot{u}\end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A_1+\frac{\partial^2}{\partial y^2}A_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_1\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}A_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_2\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_3+\frac{\partial^2}{\partial y^2}A_3+\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_3\end{bmatrix}\\ &= -\frac{1}{c_s^2}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_1\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}A_2\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}A_3\end{bmatrix}\\ &= -\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\\ &= -\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\end{aligned} \tag{28}$$

となる. したがってすでに計算によって得られている速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ からスカラ速度ポテンシャル, ベクトル速度ポテンシャルを求めることができる。ここで c_p と c_s は縦波速度と横波速度である.

2.3 2 次精度の差分式

2 次精度の中心差分は以下の差分式を使う.

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_i = \frac{f_{i+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}+O(\Delta x^2) \tag{29}$$

2.4 4 次精度の差分式

4 次精度の中心差分は以下の差分式を使う

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}|_i &= \frac{27(f_{i+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}})-(f_{i+\frac{3}{2}}-f_{i-\frac{3}{2}})}{24\Delta x}+O(\Delta x^4)\\ &= \frac{9}{8\Delta x}(f_{i+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}})-\frac{1}{24\Delta x}(f_{i+\frac{3}{2}}-f_{i-\frac{3}{2}})\end{aligned} \tag{30}$$

この差分式は以下の方法で導出した.
まず $f_{i+\frac{3}{2}}$,$f_{i+\frac{1}{2}}$,$f_{i-\frac{1}{2}}$,$f_{i-\frac{3}{2}}$ を $x=i$ の近傍でテーラー展開する。

$$\begin{aligned}
f_{i+\frac{3}{2}} &= f_i + (\frac{3}{2}\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}|_i + \frac{1}{2!}(\frac{2}{3}\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_i \\
&\quad +\frac{1}{3!}(\frac{3}{2}\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_i + \frac{1}{4!}(\frac{3}{2}\Delta x)^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (31) \\
f_{i+\frac{1}{2}} &= f_i + (\frac{\Delta x}{2})\frac{\partial f}{\partial x}|_i + \frac{1}{2!}(\frac{\Delta x}{2})^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_i \\
&\quad +\frac{1}{3!}(\frac{\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_i + \frac{1}{4!}(\frac{\Delta x}{2})^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (32) \\
f_{i-\frac{1}{2}} &= f_i - (\frac{\Delta x}{2})\frac{\partial f}{\partial x}|_i + \frac{1}{2!}(\frac{\Delta x}{2})^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_i \\
&\quad -\frac{1}{3!}(\frac{\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_i + \frac{1}{4!}(\frac{\Delta x}{2})^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (33) \\
f_{i-\frac{2}{3}} &= f_i - (\frac{3\Delta x}{2})\frac{\partial f}{\partial x}|_i + \frac{1}{2!}(\frac{3\Delta x}{2})^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_i \\
&\quad -\frac{1}{3!}(\frac{3\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_i + \frac{1}{4!}(\frac{3\Delta x}{2})^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (34)
\end{aligned}$$

(31) − (34) より

$$f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}} = 2(\frac{3\Delta x}{2})\frac{\partial u}{\partial x}|_i + \frac{2}{3!}(\frac{3\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_j + O(\Delta x^5) \qquad (35)$$

また (32) − (33) より

$$f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} = 2(\frac{\Delta x}{2})\frac{\partial u}{\partial x}|_i + \frac{2}{3!}(\frac{\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_j + O(\Delta x^5) \qquad (36)$$

を得る。(35) − $3^3 \times$ (36) より

$$f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}} - 27(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) = -24(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (37)$$

よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_i = \frac{27(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) - (f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}})}{24\Delta x} + O(\Delta x^4) \qquad (38)$$

を得る。

3　離散式

3.1　時間及び空間の 2 次精度離散式

時間および空間 2 次精度の離散式を気体（液体）中の音波と固体中の弾性波にわけて考える．

3.1.1　2 次精度離散式-気体，液体中の音波

(1) また (2) を二次精度の中心差分式を用いて離散化させる．
まず (1),(2) を展開すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}P = -\kappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial z}\dot{w}\right) \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}P\\ \frac{\partial}{\partial y}P\\ \frac{\partial}{\partial z}P\end{bmatrix} \tag{40}$$

となる。したがって (39) を二次の中心差分で書き下せば以下のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) - P^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} = &-\kappa\left(\frac{\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x}\right)\\ &-\kappa\left(\frac{\dot{w}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{w}^n(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y}\right)\\ &-\kappa\left(\frac{\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z}\right)\end{aligned} \tag{41}$$

であるから，

$$\begin{aligned}P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= P^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)\\ &- \kappa\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\\ &- \kappa\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right)\\ &- \kappa\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right)\end{aligned} \tag{42}$$

また同様に

(40) の各成分も離散化すると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&\quad -\frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
\dot{v}^{n+1}(j,i+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n+\frac{1}{2}}(j,i+\frac{1}{2},k) \\
&\quad -\frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1,k)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&\quad -\frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right)
\end{aligned}
$$

各成分の格子点上の位置関係については図 2 を参照.

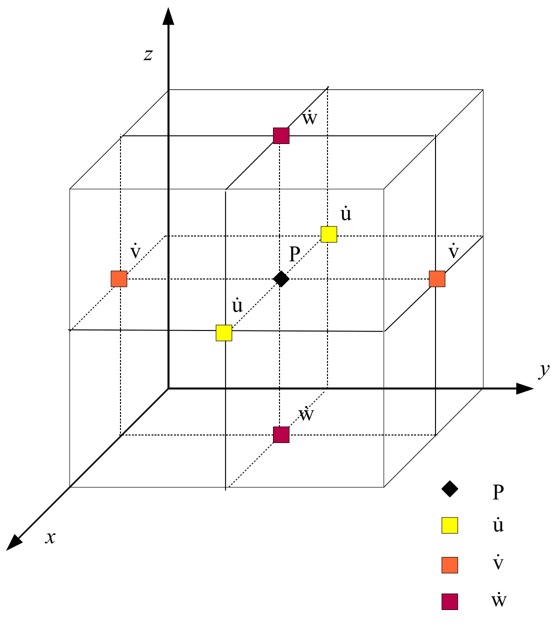


図 2: 音波の圧力と変位ベクトルを離散化しグリットに並べた図

3.1.2 2次精度離散式-固体中の弾性波

(23) と (24) を時間と空間についての 2 次精度の中心差分で書き換える.
まず (23) の第一式を差分にして書き下すと

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) - T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} &= c_{11}\frac{\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \\
&+ c_{12}\frac{\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y} \\
&+ c_{12}\frac{\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z}
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

となる.
n は時間ステップで (i,j,k) は三次元格子点 (x,y,z) を表す.Δt は時間の刻み幅で Δx,Δy,Δz はそれぞれ x 方向,y 方向,z 方向の空間刻み幅である.

以下同様にして, 残りの応力成分を差分であらわせば,

$$
\begin{aligned}
T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_2^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_3^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) &= T_4^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k+1)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{w}^n(i,j+1,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right) \\
T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) &= T_5^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k+1)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{w}^n(i+1,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right) \\
T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) &= T_6^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j+1,k)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{v}^n(i+1,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right)
\end{aligned}
$$

となる．また式 (24) についても同様にして速度ベクトル成分を計算できる．

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(T_1^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k)-T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})-T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)\right) \\
\dot{v}^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n}(i,j+\frac{1}{2},k) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1,k)-T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right) \\
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1)-T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})-T_5^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

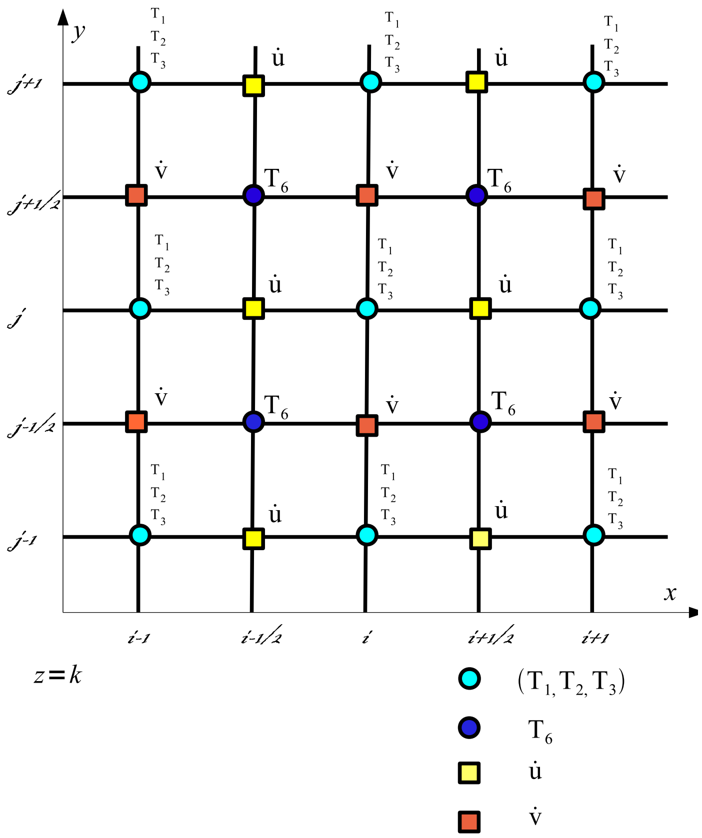


図 3: $z = k$ 面における離散化の図．垂直応力 (T_1, T_2, T_3)，せん断応力 T_6，粒子速度 $\dot{u}, \dot{v}$ を各格子上に配置する．

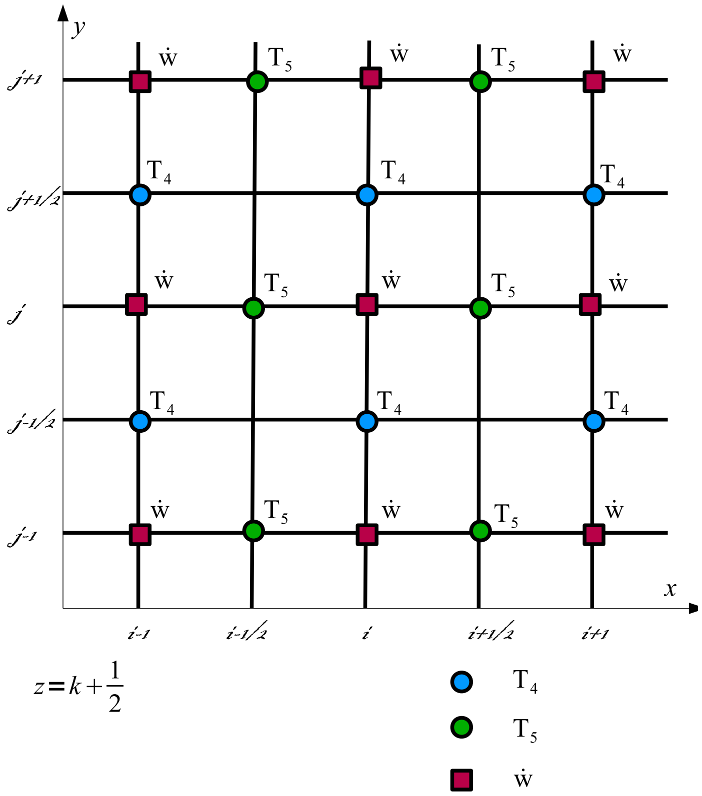
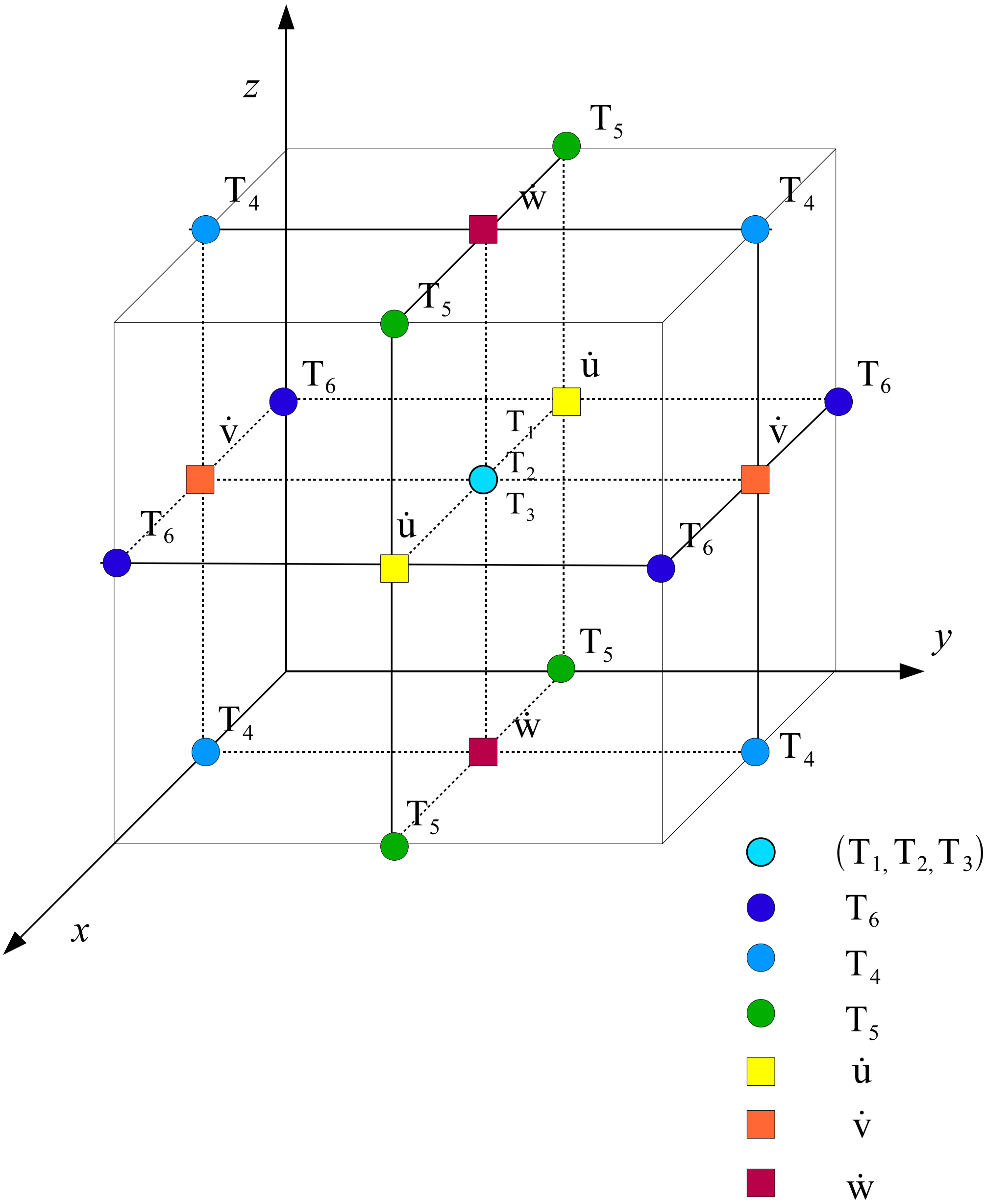


図 4: $z = k + 1$ 面における離散化の図．せん断応力 T_4, T_5 及び粒子速度 $\dot{w}$ を格子上に配置する．



z
y
x
T5
ẇ
T4
T4
T5
T6
u̇
T6
v̇
T1
v̇
T2
T3
T6
u̇
T6
T5
T4
ẇ
T4
T5
(T1, T2, T3)
T6
T4
T5
u̇
v̇
ẇ

図 5: 離散化

3.2 時間２次精度及び空間４次精度の離散式

(23) と (24) を時間については式 (30) の 4 次精度中心差分式また時間については式 (29) の 2 次精度中心差分式を使用して書きくだす.

3.2.1 空間４次精度の離散式－音波

(1) また (2) を時間について２次精度，空間について４次精度の中心差分式を用いて離散化する.

まず (39),(40) を時間２次，空間４次の中心差分で書き下せば以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)-P^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} = \\
&-\kappa\left\{\frac{9(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k))}{8\Delta x}-\frac{\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)}{24\Delta x}\right\} \\
&-\kappa\left\{\frac{9(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{u}^n(i,j-\frac{1}{2},k))}{8\Delta x}-\frac{\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)}{24\Delta x}\right\} \\
&-\kappa\left\{\frac{9(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2}))}{8\Delta x}-\frac{\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})}{24\Delta x}\right\}
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= P^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&- \kappa\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ \kappa\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right) \\
&- \kappa\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ \kappa\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)\right) \\
&- \kappa\frac{8\Delta t}{9\Delta x}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&+ \kappa\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})\right)
\end{aligned}
\tag{43}
$$

また同様に (40) の各成分も離散化すると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&\quad -\frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&\quad +\frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{3}{2}}(i+1,j,k)-P^{n+\frac{3}{2}}(i,j,k)\right) \\
\dot{v}^{n+1}(j,i+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n+\frac{1}{2}}(j,i+\frac{1}{2},k) \\
&\quad -\frac{9\Delta t}{8\rho\Delta y}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1,k)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&\quad +\frac{\Delta t}{24\rho\Delta y}\left(P^{n+\frac{3}{2}}(i,j+1,k)-P^{n+\frac{3}{2}}(i,j,k)\right) \\
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&\quad -\frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&\quad +\frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{3}{2}}(i,j,k+1)-P^{n+\frac{3}{2}}(i,j,k)\right)
\end{aligned} \tag{44}
$$

3.2.2 空間 4 次精度の離散式－弾性波

(23) と (24) を時間について 2 次また空間については 4 次精度の中心差分で書き下す．まず例として (23) の T_1 について差分を実行する．

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) - T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} &= c_{11}\frac{9\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)}{8\Delta x} \\
&- c_{11}\frac{\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)}{24\Delta x} \\
&+ c_{12}\frac{9\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right)}{8\Delta y} \\
&- c_{12}\frac{\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)}{24\Delta y} \\
&+ c_{12}\frac{9\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right)}{8\Delta z} \\
&- c_{12}\frac{\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})}{24\Delta z}
\end{aligned}
$$

したがって T_1 について時間発展形に書けば以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{11}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{11}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})\right)
\end{aligned}
$$

以下同様にして, 残りの応力成分を差分であらわせば,

$$
\begin{aligned}
T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_2^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{11}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&- c_{11}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_3^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)\right) \\
&+ c_{11}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{11}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) &= T_4^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k+1)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k+2)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k-1)\right) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{w}^n(i,j+1,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{w}^n(i,j+2,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j-1,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) &= T_5^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k+1)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k+2)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k-1)\right) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{w}^n(i+1,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{w}^n(i+2,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i-2,j,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) &= T_6^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j+1,k)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j+2,k)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j-1,k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{v}^n(i+1,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{v}^n(i+2,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i-1,j+\frac{1}{2},k)\right)
\end{aligned}
$$

となる.
また速度ベクトル (24) についても同様にして中心差分をとり離散化すれ

ば以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(T_1^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k)-T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(T_1^{n+\frac{1}{2}}(i+2,j,k)-T_1^{n+\frac{1}{2}}(i-1,j,k)\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta z}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})-T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta z}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{3}{2})-T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{3}{2})\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta y}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta y}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2},k)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{v}^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n}(i,j+\frac{1}{2},k) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta y}\left(T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1,k)-T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta y}\left(T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j+2,k)-T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j-1,k)\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta z}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta z}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2})-T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{3}{2})\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta z}\Big(T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1) - T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\Big) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta z}\Big(T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+2) - T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k-1)\Big) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta y}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta y}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{3}{2},k+\frac{1}{2})\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - T_5^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{3}{2},j,k+\frac{1}{2}) - T_5^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{3}{2},j,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

4　境界条件

4.1　想定する境界条件

想定する境界条件.

1. 真空との境界（自由境界）
この場合の条件は境界での応力が 0 になる。図 6 のように境界をとる．境界接点上の $\dot{v}$ での密度は $\frac{1}{6}\rho$ とし，$\dot{u}$ では $\frac{5}{6}\rho$ とする. 境界が $y = j + \frac{1}{2}$ にあるとして粒子速度ベクトル各々の成分を書き下すと以下のようになる．図 6, 図 7 を参照
$$\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n-1}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(T_1^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k) - T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{6}{5\rho}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})\right) \\
\dot{v}^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n}(i,j+\frac{1}{2},k) \\
&+ \frac{6}{\rho}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(-T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1) - T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{6}{5\rho}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - T_5^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}$$

2. 媒質の異なる個体同士の境界
異なる媒質の境界上の格子点においては、境界節点の前後で媒質条件を連続にするよう密度、スチフネステンソルの各成分は左右の両媒質の平均をとることにする。仮に二つの媒質の密度が ρ,ρ', スチフネステンソルの各成分が c,c' であるとする．この場合に両媒質の接合においては密度、スチフネステンソルの各成分は $\frac{\rho+\rho'}{2}$,$\frac{c+c'}{2}$ として計算する.

3. 気体（液体）と固体との境界
図 8 と図 9 を参照．図のように境界が x-y 面にある場合．気体 (液体) と固体との境界上でせん断応力 T_6 が零になる.

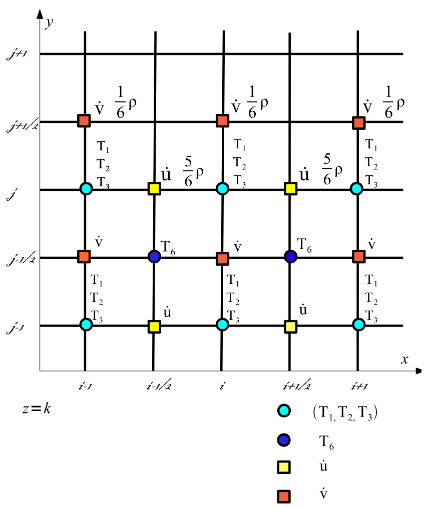


図 6: 自由境界,$z = k$

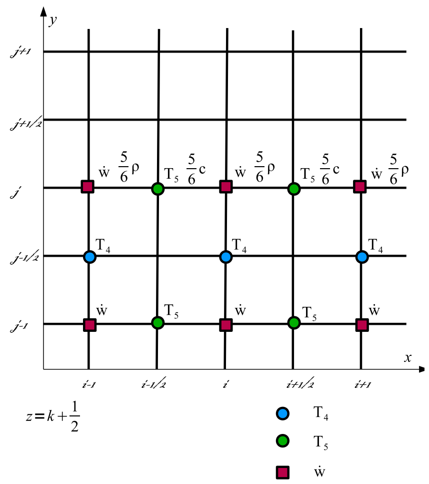


図 7: 自由境界,$z = k + \frac{1}{2}$

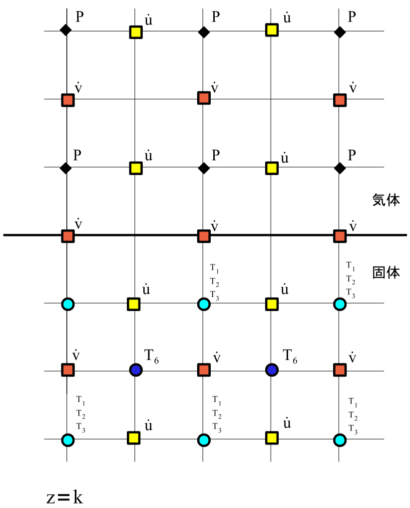


図 8: 液体と固体の境界.$z = k$

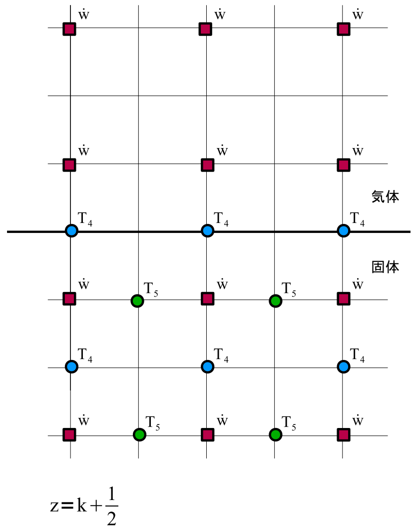


図 9: 液体と固体の境界.$z = k + \frac{1}{2}$

4. 周期境界条件

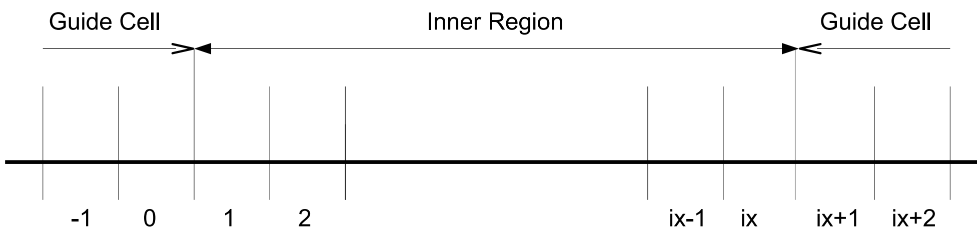


図 10: 計算領域のインデクス

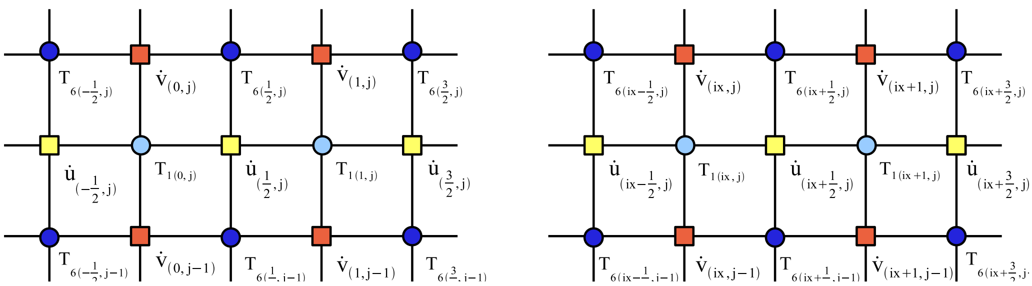


図 11: スタガード配置の変数インデクス

図 (10) は x 方向の計算領域を表した．ここでは $x = 0$ と $x = ix$ が境界であるとする．
周期境界条件は図 (11) のスタガード変数配置では以下のように設定

する．

$$
\begin{cases}
T_{1\sim4(-2)} = T_{1\sim4(ix-2)} & \dot{v}_{(-2)} = \dot{v}_{(ix-2)} & \dot{w}_{(-2)} = \dot{w}_{(ix-2)} \\
T_{1\sim4(-1)} = T_{1\sim4(ix-1)} & \dot{v}_{(-1)} = \dot{v}_{(ix-1)} & \dot{w}_{(-1)} = \dot{w}_{(ix-1)} \\
T_{1\sim4(0)} = T_{1\sim4(ix)} & \dot{v}_{(0)} = \dot{v}_{(ix)} & \dot{w}_{(0)} = \dot{w}_{(ix)} \\
T_{1\sim4(1)} = T_{1\sim4(ix+1)} & \dot{v}_{(1)} = \dot{v}_{(ix+1)} & \dot{w}_{(1)} = \dot{w}_{(ix+1)} \\
T_{1\sim4(2)} = T_{1\sim4(ix+2)} & \dot{v}_{(2)} = \dot{v}_{(ix+2)} & \dot{w}_{(2)} = \dot{w}_{(ix+2)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{u}_{(-\frac{5}{2})} = \dot{u}_{(ix-\frac{5}{2})} & T_{5,6(-\frac{5}{2})} = T_{5,6(ix-\frac{5}{2})} \\
\dot{u}_{(-\frac{3}{2})} = \dot{u}_{(ix-\frac{3}{2})} & T_{5,6(-\frac{3}{2})} = T_{5,6(ix-\frac{3}{2})} \\
\dot{u}_{(\frac{1}{2})} = \dot{u}_{(ix+\frac{1}{2})} & T_{5,6(\frac{1}{2})} = T_{5,6(ix+\frac{1}{2})} \\
\dot{u}_{(\frac{3}{2})} = \dot{u}_{(ix+\frac{3}{2})} & T_{5,6(\frac{3}{2})} = T_{5,6(ix+\frac{3}{2})} \\
\dot{u}_{(\frac{5}{2})} = \dot{u}_{(ix+\frac{5}{2})} & T_{5,6(\frac{5}{2})} = T_{5,6(ix+\frac{5}{2})}
\end{cases}
$$

5. 対象境界条件
   境界が x 面で対象なときには以下のように設定する．

$$
\begin{cases}
T_{1\sim4(-1)} = T_{1\sim4(2)} & \dot{v}_{(-1)} = \dot{v}_{(2)} & \dot{w}_{(-1)} = \dot{w}_{(2)} \\
T_{1\sim4(0)} = T_{1\sim4(1)} & \dot{v}_{(0)} = \dot{v}_{(1)} & \dot{w}_{(0)} = \dot{w}_{(1)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{u}_{(-\frac{3}{2})} = \dot{u}_{(\frac{3}{2})} & T_{5,6(-\frac{3}{2})} = T_{5,6(\frac{3}{2})} \\
\dot{u}_{(-\frac{1}{2})} = \dot{u}_{(\frac{1}{2})} & T_{5,6(-\frac{1}{2})} = T_{5,6(\frac{1}{2})}
\end{cases}
$$

6. 吸収境界条件/無反射境界条件
   計算空間は有限なので実際には存在しない境界 (壁) が計算領域の端にできる．この境界において吸収（無反射）境界を設定し波の計算領域の端での反射をなくす．これらは吸収境界条件と呼ばれ PML 法や Mur の境界条件等多くの方法が提案されている．本ソルバーにおける吸収境界条件の設定には PML 法を使用する．

4.2 PML 境界条件

PML とは Perfectly Matched Layer の略であり，完全整合層とも呼ばれる．Berenger[2] により 1994 年に提案され、以後広く使われ発展している．電磁界解析で一般的に使われており，この方法では電気伝導度 ρ と仮想的な値である磁気伝道度 (磁気損失)ρ_μ を境界でインピーダンスマッチング条件をみたし反射率が零になるように設定する．このような仮想的

な吸収媒質を境界に設置し，入射波を減衰させせる．PML の問題点としては，使用メモリまた計算時間がかかる．また並列化が困難であることがあげられる．ただし PML 吸収境界は斜めに入射した波も扱え周波数にも依存せず，また吸収精度もよいので FDTD 計算によく使われている． 弾性波にも同様に減衰項を基本方程式に加える。減衰項は PML 境界内において値を持つように設定し，PML 境界内に入射してきた波が減衰するようにする．弾性波の基本方程式は式 (4) と式 (5) であるが，減衰項 σ 及び $\sigma*$ を式 (4) と式 (5) に加える．減衰項は PML 境界内部でのみ値を持つ．減衰項が 0 の時は通常の基本方程式と同じである．

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{T} + \sigma\boldsymbol{T} = [c]\cdot\nabla_s\dot{\boldsymbol{U}} \tag{45}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{\boldsymbol{U}} + \sigma*\dot{\boldsymbol{U}} = \nabla\cdot\boldsymbol{T} \tag{46}$$

このとき応力ベクトルと粒子速度ベクトルの各成分について (x,y,x) の 3 成分に分割する．T_1 であれば $T_1 = T_{1x} + T_{1y} + T_{1z}$ のように分割する．この時 PML 境界内で式 (21) は応力につき 6 個また速度につき 3 個の計 9 個の連立方程式であるのでこの 3 倍の 27 個の連立方程式が必要になる．しかし基本的には媒質は等方的であると考えるので，式 (23) を使うので以

下のように 24 個の連立方程式に展開できる．まず応力について

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}T_{1x} + \sigma_x T_{1x} = c_{11}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{1y} + \sigma_y T_{1y} = c_{12}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{1z} + \sigma_z T_{1z} = c_{12}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{2x} + \sigma_x T_{2x} = c_{12}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{2y} + \sigma_y T_{2y} = c_{11}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{2z} + \sigma_z T_{2z} = c_{12}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{3x} + \sigma_x T_{3x} = c_{12}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{3y} + \sigma_y T_{3y} = c_{12}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{3z} + \sigma_z T_{3z} = c_{11}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{4z} + \sigma_z T_{4z} = c_{44}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{4y} + \sigma_y T_{4y} = c_{44}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{5y} + \sigma_z T_{5z} = c_{44}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{5x} + \sigma_x T_{5x} = c_{44}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{6y} + \sigma_y T_{6x} = c_{44}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{6x} + \sigma_x T_{6x} = c_{44}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z)
\end{aligned}
\tag{47}
$$

また粒子速度ベクトルの各成分については

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{u}_x + \sigma *_x \dot{u}_x &= c_{44}\frac{\partial}{\partial x}(T_{1x}+T_{1y}+T_{1z}) \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{u}_z + \sigma *_z \dot{u}_z &= c_{44}\frac{\partial}{\partial z}(T_{5x}+T_{5z}) \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{u}_y + \sigma *_y \dot{u}_y &= c_{44}\frac{\partial}{\partial y}(T_{6x}+T_{6y}) \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{v}_y + \sigma *_y \dot{v}_y &= c_{44}\frac{\partial}{\partial y}(T_{2x}+T_{2y}+T_{2z}) \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{v}_z + \sigma *_z \dot{v}_z &= c_{44}\frac{\partial}{\partial z}(T_{4y}+T_{4z}) \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{v}_x + \sigma *_x \dot{v}_x &= c_{44}\frac{\partial}{\partial x}(T_{6x}+T_{6y}) \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{w}_z + \sigma *_z \dot{w}_z &= c_{44}\frac{\partial}{\partial z}(T_{3x}+T_{3y}+T_{3z}) \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{w}_y + \sigma *_y \dot{w}_y &= c_{44}\frac{\partial}{\partial y}(T_{4y}+T_{4z}) \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{w}_x + \sigma *_x \dot{w}_x &= c_{44}\frac{\partial}{\partial x}(T_{5x}+T_{5z})
\end{aligned} \tag{48}$$

となる．

この方程式を差分で書き下す．例として T_{1x} について時間及び空間 2 次精度の離散式を書く．このとき $T_{1x}^{n}(i,j,k)$ という値は FDTD 法では存在しないので以下の式で近似する．

$$T_{1x}^{n}(i,j,k) = \frac{T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) + T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{2} \tag{49}$$

すると T_{1x} については

$$\begin{aligned}
&\frac{T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) - T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} + \sigma\frac{T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) + T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{2} \\
&\qquad = c_{11}\frac{\dot{u}_x^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_x^{n}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \\
&\qquad\quad + c_{11}\frac{\dot{u}_y^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_y^{n}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \\
&\qquad\quad + c_{11}\frac{\dot{u}_z^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_z^{n}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

T_{1x} について時間発展形に書き直せば

$$
\begin{aligned}
T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= \left(\frac{1-\frac{\sigma\Delta t}{2}}{1+\frac{\sigma\Delta t}{2}}\right) T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ \frac{1}{1+\frac{\sigma\Delta t}{2}} \times \\
&\left\{ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_x^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right. \\
&+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ \left. c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_x^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right\} \qquad (50)
\end{aligned}
$$

ここで $\frac{\sigma\Delta t}{2} = \alpha$ と置き，次の近似式を用いる．

$$
\begin{aligned}
1+\alpha &= \exp[\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3}\cdots] \\
1-\alpha &= \exp[-\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3}\cdots]
\end{aligned}
$$

そのとき

$$
\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \exp[2\alpha\cdots]
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{1+\alpha} &= \frac{\sigma\Delta t}{\sigma\Delta x}\frac{1}{1+\alpha} \\
&= \frac{2\alpha}{\sigma\Delta x}\frac{1}{1+\alpha} \\
&= \frac{1}{\sigma\Delta x}\frac{2\alpha}{1+\alpha} \\
&= \frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1 - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1 - \exp[-2\alpha]\right\}
\end{aligned}
$$

となる．xs これらの近似を用いて式 (50) を書き直せば

$$
\begin{aligned}
T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) \;\; &= \;\; \exp[\sigma\Delta t] T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ \;\; \frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1-\exp[-\sigma\Delta t]\right\} \times \\
&\quad\;\; \left\{c_{11}\left(\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}_x^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right. \\
&+ \;\; c_{11}\left(\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ \;\; \left. c_{11}\left(\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}_x^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right\} \qquad (51)
\end{aligned}
$$

以下同様に応力の各成分と粒子速度の各成分も離散化する．

参考文献

[1] 佐藤雅弘,“FDTD 法による弾性振動・波動の解析入門”, 森北出版株式会社境界条件”, 第 19 回数値流体力学シンポジウム,C7-4.

[2] J-P.Berenger, “A perfectly mathed layer for absorption of electromagnetic waves” J.Comput. Phys., vol.114, no.1, pp. 185-200,1994